Série 10 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Changement de base, matrice d'une application linéaire, vecteur propre, valeur propre*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?
b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Sol.:

a) En calculant $A - 6I_3$, on obtient une matrice dont la seconde ligne est nulle, donc une matrice non-inversible. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A - 6I_3) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ et 6 est une valeur propre.
b) On calcule :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A + 9I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de ces matrices (en développant par rapport à la deuxième ligne) sont respectivement $5 \cdot (-16 \cdot 2 + 4 \cdot 9)$ et $15 \cdot (-6 \cdot 12 + 4 \cdot 9)$. Ils sont non nuls, par conséquent ces matrices sont inversibles, et ni 1 ni -9 ne sont des valeurs propres.

Exercice 2

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A. Oui car A est déjà diagonale.

B. Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$. Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 est linéairement indépendante, et constitue une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, B est diagonalisable.

C. Oui. Les valeurs propres de C sont $4, 5, 5$ (obtenues en cherchant les racines du polynôme caractéristique). Comme la valeur propre 5 est de multiplicité 2, il faut vérifier si la dimension de l'espace propre associé est aussi 2. On calcule :

$$C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\text{rang}(C - 5I_3) = 1$. Par conséquent, $\dim Ker(C - 5I_3) = 3 - 1 = 2$, et la matrice C est diagonalisable.

D. Oui. Le polynôme caractéristique de D est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda + 6).$$

Les valeurs propres sont donc $0, -6, 6$. Elles sont distinctes donc D est diagonalisable.

Remarque : le théorème spectral stipule que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 3

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.

b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Sol.:

a) L'affirmation est vraie. Si A est diagonalisable, alors il existe P une matrice $n \times n$ inversible et D une matrice $n \times n$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, on a

$$P^{-1}A^kP = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP = DD \dots D = D^k,$$

et comme D^k est diagonale, A^k est bien diagonalisable.

b) L'affirmation est fausse. En effet, on considère la matrice A avec des zéros partout sauf un 1 en haut à droite (ligne 1, colonne n). Cette matrice A n'est pas diagonalisable, et pourtant A^k est nulle donc diagonalisable.

Exercice 4

Existe t-il une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2 ?

Sol.: Non. En effet, soit A une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre λ de multiplicité 2. Diagonalisons la matrice : il existe P inversible telle que

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \lambda I_2$. On déduit $A = \lambda P I_2 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_2$. La matrice A est donc proportionnelle à la matrice identité, elle ne peut pas être de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

Exercice 5

Soit A une matrice de taille 2×2 et $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le système $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ a une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
b) Dès maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A\overrightarrow{x}$.
c) Trouver pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
d) Montrer que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de A.
e) Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

Sol.: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

a) Le système $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ a une solution non nulle si et seulement s'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{x}$ tel que
$$\overrightarrow{0} = A\overrightarrow{x} - \lambda\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x} - \lambda I_2\overrightarrow{x} = (A - \lambda I_2)\overrightarrow{x}$$
Ceci signifie que le système homogène associé à la matrice $A - \lambda I_2$ a une solution non triviale, autrement dit cette matrice n'est pas inversible.
b) On calcule $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + 3v \\ 3u + v \end{pmatrix}$
c) La matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement son déterminant est nul. Il suffit donc de calculer
$$\det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 3^2$$
Pour que ce déterminant soit nul il faut donc que $(1-\lambda)^2 = 9$, autrement dit $1 - \lambda = \pm 3$. On en conclut que les valeurs cherchées sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda = 4$.
d) Lorsque λ vaut -2 ou 4, la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible et le système de la partie 2 a donc une solution non triviale. Cela veut exactement dire que cette solution non triviale forme un vecteur propre. Ainsi les les valeurs propres sont -2 et 4.
e) On calcule $E_4 = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_{-2} = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Exercice 6

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Sol.: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 6, on a que $6 = 1+2+3$ est une valeur propre. Un vecteur propre est par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Celui-ci forme une base de E_6.

D'autre part le rang de cette matrice vaut 1 car toutes les colonnes sont proportionnelles. Par conséquent le noyau est de dimension 2 par le Théorème du rang ce qui signifie que 0 est une valeur propre. L'espace propre E_0 est donc de dimension 2 : $E_0 = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ dont une base est donnée par $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

a) Est-ce que $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.

b) Est-ce que $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?

c) Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de cet espace propre ?

Sol.:

a) Le nombre $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ si et seulement si il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ non nul tel que $A\overrightarrow{x} = 4\overrightarrow{x}$. Dans ce cas $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4. Puisque $4\overrightarrow{x} = (4I_3)\overrightarrow{x}$, nous nous demandons en fait si la matrice $A - 4I_3$ a un noyau non nul. Il suffit donc d'échelonner cette matrice pour le vérifier.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi 4 est une valeur propre. On trouve par exemple comme vecteur propre

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Pour qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ soit vecteur propre de A, il doit satisfaire l'équation $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ pour une certaine valeur de λ. Ici, le produit $A\overrightarrow{x}$ donne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda = 0$.

c) L'espace propre correspondant à une valeur propre λ contient tous les vecteurs qui satisfont $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, c'est-à-dire $(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0$. L'espace propre est donc identique à $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Pour trouver sa base, on exprime la solution de l'équation $(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ dans sa forme paramétrique. Ici, on trouve deux variables libres x_2 et x_3 et en réexprimant x_1 en fonction de ces deux variables libres, la forme paramétrique nous livre deux vecteurs de base pour la valeur propre $\lambda = 3$ donnés par

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimension du sous-espace propre correspondant à $\lambda = 3$ est donc égale à 2.

Exercice 8

Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

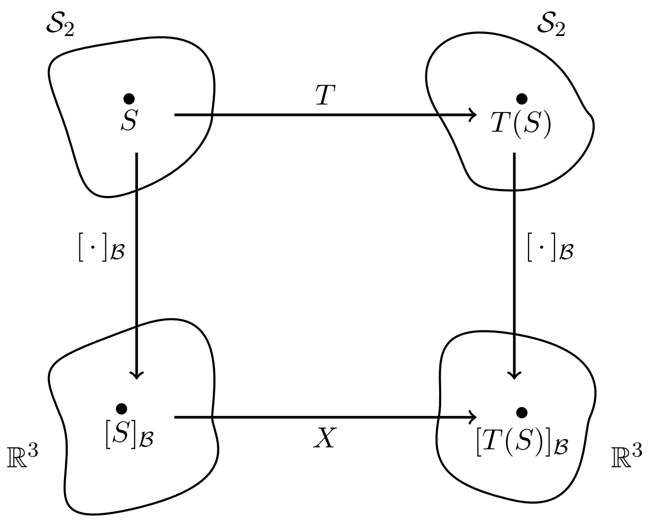
a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.

b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

c) Ecrire la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sol.: On cherche à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(S) = \lambda S$, pour S symétrique. Or pour résoudre cela, on aimerait avoir une matrice pour pouvoir calculer ses valeurs propres comme on a l'habitude de faire. On calcule alors la matrice de l'application T dans la base $\mathcal{B}$. Voila un schéma et une explication de pourquoi.



On aura $[T(S)]_{\mathcal{B}} = X[S]_{\mathcal{B}}$ où X est la matrice qui représente T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ (elle sera 3×3). Par définition, la matrice X est donnée par

$$X = ([T(S_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(S_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(S_3)]_{\mathcal{B}})$$

Si $T(S) = \lambda S$ on a $[T(S)]_{\mathcal{B}} = \lambda[S]_{\mathcal{B}}$ car $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ est linéaire. Donc, en combianant les deux égalités pour $[T(S)]_{\mathcal{B}}$ on obtient que : trouver les valeurs propres de T est équivalent à trouver les valeurs propres de la matrice X. On doit alors trouver λ tel que $X[S]_{\mathcal{B}} = \lambda[S]_{\mathcal{B}}$.

Par contre les vecteurs propres obtenus seront des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et il faudra utiliser la définition de $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ pour trouver les matrices associées aux valeurs propres obtenues.

On calcule les images des différents vecteurs de base :

$$T(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(S_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis on cherche les coefficients de $T(S_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ceci nous donnera les colonnes de la matrice de l'application T par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) On calcule :

$$\det(X - \lambda \cdot I_3) = (2-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 3).$$

Ainsi, on a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$.

b) On cherche les différents espaces propres. Pour $\lambda = 1$, on cherche donc les matrices A symétriques telles que $T(A) = A$. Il s'agit donc de calculer le noyau de $X - I_3$. On trouve une droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui représente la matrice symétrique $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

De même, pour $\lambda = -1$, on trouve $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on aurait pu le deviner, puisque $T(S_2) = -S_2$).

Finalement, pour la dernière valeur propre 3, on trouve $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On sait que trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (vous pouvez aussi le vérifier à la main). Comme l'espace des matrices symétriques de taille 2 est de dimension 3, il s'agit d'une base.

c) Par un théorème du cours, on sait que la matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale est la matrice qui représente l'application T dans la base formée de vecteurs propres $[M_i]_{\mathcal{B}}$. Il suffit de placer les valeurs propres dans l'ordre choisi dans la diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On peut aussi utiliser la définition de la matrice qui représente T dans la base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres
$$D = ([T(M_1)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(M_2)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(M_3)]_{\mathcal{B}'})$$

Si on combine le tout on aura
$$X = ([M_1]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}})D([M_1]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}})^{-1}$$

et on voit que nous avons fait une diagonalistion de X.

d) On remarque que l'on peut écrire
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-1) \cdot M_3,$$

c'est-à-dire que les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(2, 2, -1)$. Ainsi les composantes de $T^{10}(A)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3^{10} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a
$$T^{10}(A) = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-3^{10})M_3 = \begin{pmatrix} 2 - 3^{10} & 2 \\ 2 & 2 + 3^{10} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A = PDP^{-1}$; ensuite, utiliser cette expression pour donner une expression simple pour A^k, pour un entier positif k quelconque. ***Sol.:*** On vérifie en effet que

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = A\,.$$

La factorisation $A = PDP^{-1}$ permet de calculer facilement les puissances successives de A. En effet,

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2}DP^{-1} = PD^2P^{-1}\,.$$

Par induction, on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = PD^nP^{-1}\,.$$

Remarquons que puisque D est diagonale, sa n-ème puissance est donnée par

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Ceci permet donc de calculer

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

qui se simplifie pour donner

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-3^n}{4} \\ (-1)^n - 3^n & \frac{3^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Une matrice A carrée n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A.	☐	☐
b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.	☐	☐
c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.	☐	☐
d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.	☐	☐

Sol.: Vrai : a). Faux : b), c), d).

a) Vrai. Supposons A de taille $n \times n$. Alors 0 est valeur propre de A si et seulement s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $x_0 \neq 0$ tel que $Ax_0 = 0$. Ceci est equivalent à dire que $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$, c'est-à-dire A n'est pas injective ce qui est equivalent à non inversible puisque A est carrée.

b) Faux. Prenons $A = 0$ la matrice nulle. Alors A est diagonale (donc diagonalisable) mais pas inversible.

c) Faux. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors 0 et 2 sont ses valeurs propres mais ces valeurs ne se trouvent pas sur la diagonale.

d) Faux. Dans l'exemple ci-dessus la forme échelonnée réduite de A est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais la valeur propre 2 de A n'apparaît pas dans celle-ci.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres. ☐ ☐
b) Pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes. ☐ ☐
c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes. ☐ ☐
d) Soient A, B et C trois matrices de même taille. Si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C. ☐ ☐

Sol.: Vrai : a), d). Faux : b), c).

a) Supposons que A et B soient semblables (de taille $n \times n$) et montrons qu'elles ont les mêmes valeurs propres. L'hypothèse que A est semblable à B signifie qu'il existe une matrice inversible S de taille $n \times n$ telle que $B = S^{-1}AS$. Calculons $p_B(t)$ le polynôme caractéristique de B et montrons qu'il est égal à celui de A : On a que $p_B(t) = \det(B - tI_n) = \det(S^{-1}AS - tI_n) = \det(S^{-1}AS - S^{-1}tI_nS) = \det(S^{-1}(A - tI_n)S)$. En utilisant le fait que $\det(CD) = \det(C)\det(D)$ (pour des matrices carrées de même taille C, D), on trouve :

$$p_B(t) = \det(S^{-1}(A - tI_n)S) = \det(S^{-1})\det(A - tI_n)\det(S)$$

$$= \det(S)^{-1}\det(S)\det(A - tI_n) = p_A(t).$$

Les matrices A et B ont donc les mêmes polynômes caractéristiques ce qui implique qu'elles ont même ensemble de valeurs propres (qui sont les racines de leur polynôme caractéristique).
b) Faux. La matrice identité est diagonal(isabl)e mais elle ne possède qu'une seule valeur propre : 1.
c) Faux. Prenons $A = I_n$ la matrice identité de taille $n \times n$. Alors tout vecteur non-nul est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
d) Vrai. Si A est semblable à B et B est semblable à C cela signifie qu'il existe deux matrices inversibles S, T telles que $B = S^{-1}AS$ et $C = T^{-1}BT$. Donc $C = T^{-1}S^{-1}AST = (ST)^{-1}A(ST)$ ce qui signifie que A est semblable à C.

Exercice 12

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

V F

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes. ☐ ☐
b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres.
c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible. ☐ ☐

d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable. ☐ ☐
e) Si 0 est valeur propre, alors rang $(A) < n$. ☐ ☐
f) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. ☐ ☐

Sol.:

a) Faux. En effet la matrice identité est diagonale donc diagonalisable, et pourtant sa seule valeur propre est 1.
b) Faux. A doit posséder n vecteurs propres linéairement indépendants. Pour un contre-exemple il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable et qui possède une infinité de vecteurs propres $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ (pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) pour la valeur propre $\lambda = 1$.
c) Faux. Méthode 1 : La matrice nulle est diagonalisable mais non inversible.
Méthode 2 : On peut aussi proposer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale donc diagonalisable, mais non inversible.
d) Faux (pour $n \geqslant 2$). En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, mais non diagonalisable, car l'espace propre associé à la valeur propre 1 (de multiplicité 2) est de dimension seulement 1.
e) Vrai. Si 0 est valeur propre, la dimension du noyau est non nulle, et donc rang $(A) = n - \dim \operatorname{Ker} A < n$.
f) Vrai. A et $B = P^{-1}AP$ sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités).
Remarque : si on note $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ les vecteurs propres de B, alors les vecteurs propres de A sont $P\vec{v}_1, P\vec{v}_2, \ldots$.

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice. ☐ ☐
b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0. ☐ ☐
c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale. ☐ ☐
d) L'ensemble $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant. ☐ ☐

Sol.: Vrai : a), b), c). Faux : d).

a) Vrai. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A de taille $n \times n$. Alors l'espace propre associé à λ est par définition $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I_n)x = 0\} = \operatorname{Ker}(B)$ où $B = A - \lambda I_n$.

b) Vrai. Soit A de taille $n \times n$ telle que $A^2 = 0$ et soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{v} \neq 0$ et $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors que $\overrightarrow{0} = A^2\overrightarrow{v} = A(A\overrightarrow{v}) = A(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda A\overrightarrow{v} = \lambda^2\overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{v} \neq 0$ ceci implique que $\lambda^2 = 0$ et donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de A.

c) Vrai. Soit A triangulaire supérieure (le cas inférieur étant similaire), disons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A étant les racines du polynôme caractéristique de A on calcule celui-ci :

$$p_a(t) = \det(A - tI_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - t \end{pmatrix} = (a_{11} - t) \cdots (a_{nn} - t).$$

d) Vrai. Nous allons prouver l'assertion par récurrence sur n le nombre de vecteurs propres de A.

Si $n = 1$ l'assertion est vraie car un vecteur propre est non-nul par définition donc la famille $\{v_1\}$ est linéairement indépendante.

Supposons $n \neq 2$ et le résultat vrai pour $n - 1$ vecteurs propres ayant des valeurs propres distinctes.

Par l'absurde, supposons que v_1 soit combinaison linéaire de $v_2, \ldots, v_n$ disons $v_1 = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. En appliquant A à cette équation on obtient

$$\lambda_1 v_1 = Av_1 = A(\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n$$

Donc $\lambda_1(\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n$ ce qui s'écrit

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_1 - \lambda_n)v_n$$

Les $n - 1$ vecteurs $v_2, \ldots, v_n$ étant linéairement indépendants on obtient que

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \cdots = \alpha_n(\lambda_1 - \lambda_n) = 0$$

et comme les λ_i sont distincts ceci implique que $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ ce qui entraîne que $v_1 = 0$ absurde (puisque v_1 est vecteur propre donc non nul).

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 14

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

- A n'est pas diagonalisable. Ses valeurs propres sont : $-2, -2, 1$. La dimension de l'espace propre pour $\lambda = -2$ est seulement 1 alors que la multiplicité est 2.
- B est diagonalisable. En effet, les valeurs propres sont distinctes :

$$2, 1, \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right).$$

On voit facilement que $\overrightarrow{v}_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ et $\overrightarrow{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Les vecteurs propres pour $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right)$ et $\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right)$ sont

$$\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17+7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17-7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, si $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3\ \overrightarrow{v}_4)$, on a $B = P\widetilde{D}P^{-1}$.
- C est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, -3, -3$.
Vecteurs propres associés : $\overrightarrow{v}_1 = (-16\ 4\ 0\ 1)^T$, $\overrightarrow{v}_2 = (-8\ 4\ 1\ 0)^T$, $\overrightarrow{v}_3 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$, $\overrightarrow{v}_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$.
Remarque : les vecteurs propres $(0\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 0\ 1)^T$ étaient faciles à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(5, 5, -3, -3)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3\ \overrightarrow{v}_4)$, on a $C = P\widetilde{D}P^{-1}$.
- D est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, 4$.
Vecteurs propres associés : $\overrightarrow{v}_1 = (-2\ 0\ 1)^T$, $\overrightarrow{v}_2 = (0\ 1\ 0)^T$, $\overrightarrow{v}_3 = (-1\ 2\ 0)^T$.
Remarque : le vecteur propre $(0\ 1\ 0)^T$ était facile à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(5, 5, 4)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3)$, on a $D = P\widetilde{D}P^{-1}$.
- E n'est pas diagonalisable. Valeurs propres : $0, 0$. La dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 0$ est seulement 1.

Exercice 15

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geqslant 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k\text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$.

Sol.: Par définition, on a $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$. Par récurrence sur k, on montre $A^k\overrightarrow{v} = \lambda^k\overrightarrow{v}$. Supposons le résultat vrai au rang $k-1$, c-à-d $A^{k-1}\overrightarrow{v} = \lambda^{k-1}\overrightarrow{v}$. On a alors :

$$A^k\overrightarrow{v} = A(A^{k-1}\overrightarrow{v}) = A(\lambda^{k-1}\overrightarrow{v}) = \lambda^{k-1}A\overrightarrow{v} = \lambda^{k-1}\lambda\overrightarrow{v} = \lambda^k\overrightarrow{v}.$$

Ceci montre que le vecteur $\overrightarrow{v}$, non nul, est un vecteur propre de la matrice A^k associé à la valeur propre λ^k.

Exercice 16

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.
b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Sol.:

a) Si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}.$$

La valeur propre λ est non nulle car la matrice A est inversible. On multiplie à gauche par $\lambda^{-1}A^{-1}$, et on obtient

$$\lambda^{-1}\overrightarrow{v} = A^{-1}\overrightarrow{v},$$

d'où le résultat.

b) Le déterminant de la matrice $A-\lambda I_n$ étant égal au déterminant de la transposée $(A-\lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$, les matrices A et A^T ont donc le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres (qui sont les racines du polynôme caractéristique).

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ et les vecteurs propres associés sont $\overrightarrow{v}_1 = (2\ \ 1)^T$, $\overrightarrow{v}_2 = (-2\ \ 1)^T$. Par contre les vecteurs propres correspondants de la matrice A^T sont $\overrightarrow{v}_1 = (1\ \ 2)^T$, $\overrightarrow{v}_2 = (-1\ \ 2)^T$.

Remarque : bien sûr, si A est symétrique, les vecteurs propres de A et A^T sont les mêmes.

Exercice 17

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice de taille $n \times n$.

a) On suppose que $a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} = \lambda$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A. Quel est le vecteur propre associé ?

b) On suppose que $a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = \lambda$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A.

Sol.:

a) Soit $\overrightarrow{v} = (1\ \ 1 \ldots 1)^T$. Matriciellement, on a

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$$

et donc λ est une valeur propre avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$.

b) La matrice A^T vérifie l'hypothèse du a), donc λ est une valeur propre de A^T. Or, A et A^T ont les mêmes valeurs propres d'après l'exercice 6 b), d'où le résultat.

Exercice 18

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Calculer les vecteurs propres de A.
3. Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
4. Calculer A^{1000}.

Sol.: 1) Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 5)\,.$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

2) On cherche d'abord le(s) vecteur(s) propre(s) associé(s) à λ_1, c'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{v}$ satisfaisant $A\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v}$, en résolvant

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,.$$

(On *sait* que ce système doit posséder une infinité de solutions !) On trouve que tous les vecteurs propres sont colinéaires à

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

On trouve de même que tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont colinéaires à

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

3) Si

$$P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

on calcule :

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \equiv D\,,$$

qui n'est autre que la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. On a donc *diagonalisé* la matrice A.

4) Comme vu en classe, la diagonalisation permet de calculer les grandes puissances de A de manière directe. Comme $P^{-1}AP = D$, on a $A = PDP^{-1}$, et

$$\begin{aligned} A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{pmatrix} (-\tfrac{1}{3}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}5^{1000} & -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}5^{1000} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}5^{1000} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}5^{1000} \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Exercice 19

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer ses valeurs propres.

Sol.: On calcule le polynôme caractéristique et on obtient $p_\lambda(A) = \lambda^3(\lambda - 2)$. Ainsi les valeurs propres sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$.

Exercice 20

Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a un polynôme caractéristique p_A qui peut s'écrire sous forme factorisée comme suit : $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de A (réelles ou complexes, et pas forcément toutes différentes).

Montrez que $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Avec des mots : le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres (multiplicités comprises). Ceci est vrai pour toute matrice carrée (même si elle n'est pas diagonalisable). ***Sol.:*** On a $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Dès lors,

$p_A(0) = \det(A)$. Par ailleurs, $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ et donc $p_A(0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Ceci conclut la démonstration que $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Exercice 21

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ($A = A^T$). On considère les matrices suivantes de W :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W.

Sol.: La méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W est la suivante. On commence en formant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées des A_i (dans la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et on s'empresse d'échelonner :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On garde les matrices (A_1, A_2, A_4) qui correspondent aux colonnes pivots de la matrice ci-dessus. On a bien une base de W puisque W est un sous-espace de dimension 3 de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ce qui se voit par exemple en remarquant que la dimension est strictement plus petite que 4 et que les trois matrices choisies sont linéairement indépendantes comme le montrent nos calculs ; ou encore en remarquant que les matrices symétriques sont définies par une équation $a_{12} = a_{21}$).
